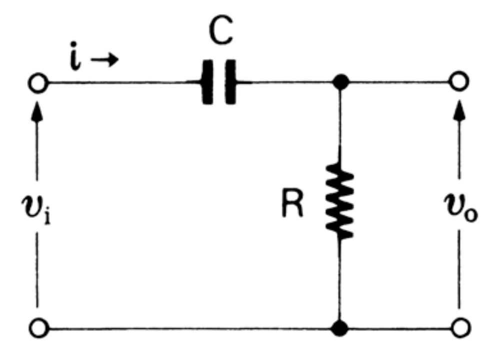
ΧΡΟΝΙΚΗ ΚΑΙ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΤΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ

Σπύρος Νικολαΐδης
Αναπληρωτής Καθηγητής
Τομέας Ηλεκτρονικής & ΗΥ
Τμήμα Φυσικής

ΧΡΟΝΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΤΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ

- Τα κυκλώματα που θεωρούμε εδώ είναι γραμμικά και επομένως η δυναμική τους λειτουργία περιγράφεται από γραμμικές διαφορικές εξισώσεις
- Οι λύσεις των εξισώσεων μας δίνουν τη χρονική απόκριση των κυκλωμάτων σε συγκεκριμένες διεγέρσεις
- Η εξέταση των κυκλωμάτων στο πεδίο της συχνότητας αποτελεί την αρμονική απόκρισή τους και συμπληρώνει τις γνώσεις μας για τη συμπεριφορά τους

Κυκλώματα διαφόρισης RC



- Δικτύωμα διαφόρισης
  - Για τη λήψη λεπτών αιχμών από τετραγωνικούς παλμούς
- Υψηπερατό φίλτρο
  - Κόβει τις χαμηλές συχνότητες
- Δικτύωμα προήγησης φάσης
- Εξέταση συμπεριφοράς για βηματική είσοδο
  - Διαφορική εξίσωση που διέπει τη λειτουργία του

$$u_0 = Ri = RC\frac{du_c}{dt} = RC\frac{d\left(u_i - u_o\right)}{dt}$$

$$RC\frac{du_o}{dt} + u_o = RC\frac{du_i}{dt}$$

Απόκριση σε βηματική είσοδο

- Βηματική είσοδος

$$u_i(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ K, & t > 0 \end{cases} \qquad \text{Άρα} \qquad \frac{du_i}{dt} = 0 \quad \gamma\iota\alpha \quad t > 0$$

Η διαφορική εξίσωση γίνεται

$$RC\frac{du_o}{dt} + u_o = 0$$

Θέτωντας $u_o = Ae^{\rho t}$ βρίσκουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση

$$RC\rho + 1 = 0 \Rightarrow \rho = -\frac{1}{RC} \qquad \text{Συνεπώς} \quad u_o = Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

Η τιμή της σταθεράς A προσδιορίζεται από τις αρχικές συνθήκες

Έχουμε $u_o(t)=u_i(t)-u_c(t)$ και επειδή $u_c(0^+)=0$ θα έχουμε $u_o(0^+)=u_i(0^+)=K$

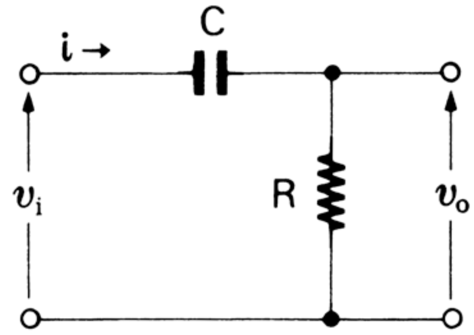
Επίσης $u_o(0^+)=A$

Απόκριση σε βηματική είσοδο

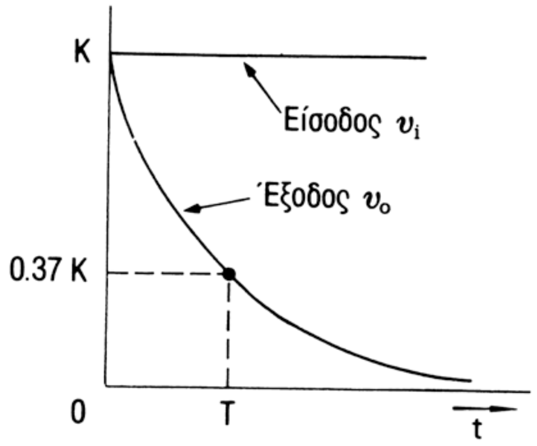
- Έξοδος

$$u_o = Ke^{-\frac{t}{RC}}$$

- Γινόμενο RC: σταθερά χρόνου



Απόκριση κυκλώματος



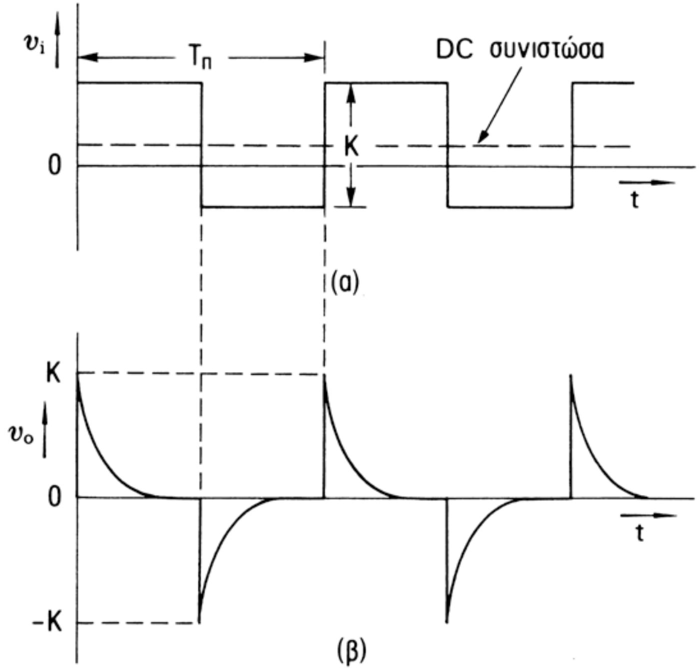
Για *t*=*T*

$$u_o(T) = \frac{K}{e} = \frac{K}{2,71} \cong 0,37K$$

Η σταθερά χρόνου ισούται με το χρόνο που παρέρχεται για να Κατέβει το σήμα στα 37% της αρχικής τιμής

Απόκριση κυκλώματος διαφόρισης

- Αν διαφορίσουμε τετραγωνικούς παλμούς ιδανικά παίρνουμε κρουστικούς παλμούς απείρου ύψους και μηδενικής διάρκειας
- Πραγματική απόκριση του κυκλώματος



Όσο η σταθερά χρόνου γίνεται μικρότερη τόσο πλησιάζουμε την ιδανική περίπτωση

Το ύψος παραμένει πάντα ίσο με *K*

Απόκριση σε συνημιτονική είσοδο

- Για συνημιτονικό σήμα εισόδου

$$u_i = V_m \cos \omega t, \quad t \geq 0$$

- Η διαφορική εξίσωση γίνεται

$$RC\frac{du_o}{dt} + u_o = -RC\omega V_m \sin \omega t$$

- Η λύση της αποτελείται από δύο μέρη: τη λύση της ομογενούς και μιας μερικής λύσης, οπότε:

$$u_o = u_{o1} + u_{o2} = Ae^{-\frac{t}{RC}} + B\cos\left(\omega t + \varphi\right)$$

- Ο πρώτος όρος φθίνει με το χρόνο και αποτελεί τη μεταβατική απόκριση
- Ο δεύτερος όρος οφείλεται στην είσοδο και αποτελεί τη μόνιμη απόκριση

Απόκριση σε συνημιτονική είσοδο

- Για το προσδιορισμό των σταθερών *B* και *φ* θέτουμε τη μερική λύση στη διαφορική εξίσωση

$$-BRC\omega\sin\left(\omega t+\varphi\right)+B\cos\left(\omega t+\varphi\right)=-RC\omega V_m\sin\omega t$$

- Για ωt=0 προκύπτει

$$-RC\omega\sin\varphi+\cos\varphi=0 \quad\Rightarrow\quad \varphi=\tan^{-1}\frac{1}{RC\omega}$$

- Για $\omega t=\pi/2$ προκύπτει $B\left(RC\omega\cos\varphi+\sin\varphi\right)=V_m RC\omega$

$$B=\frac{RV_m}{\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

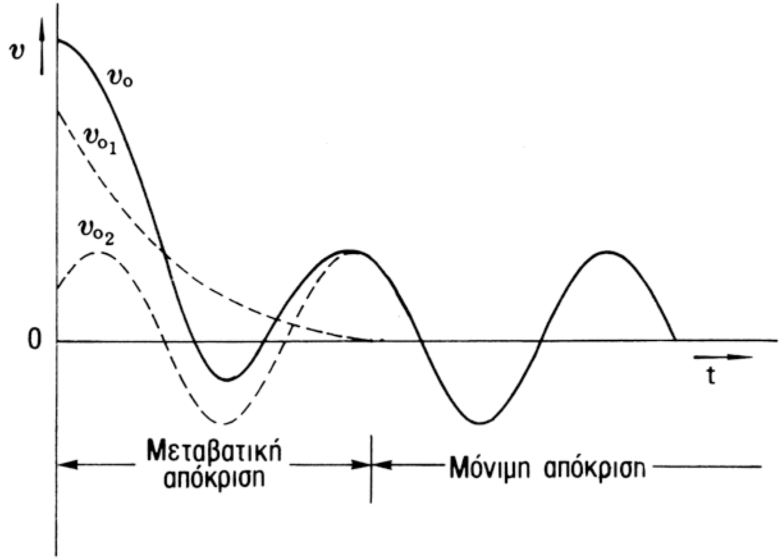
- $u_i(0)=V_m$ και καθώς $u_c(0)=0$ έχουμε $u_o(0)=V_m$ και άρα:

$$V_m=A+B\cos\varphi\Rightarrow A=\frac{V_m}{1+\left(RC\omega\right)^2}$$

Απόκριση σε συνημιτονική είσοδο

- Τελικά

$$u_o(t) = \frac{V_m}{1+(RC\omega)^2} e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{V_m R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}} \cos(\omega t + \varphi)$$

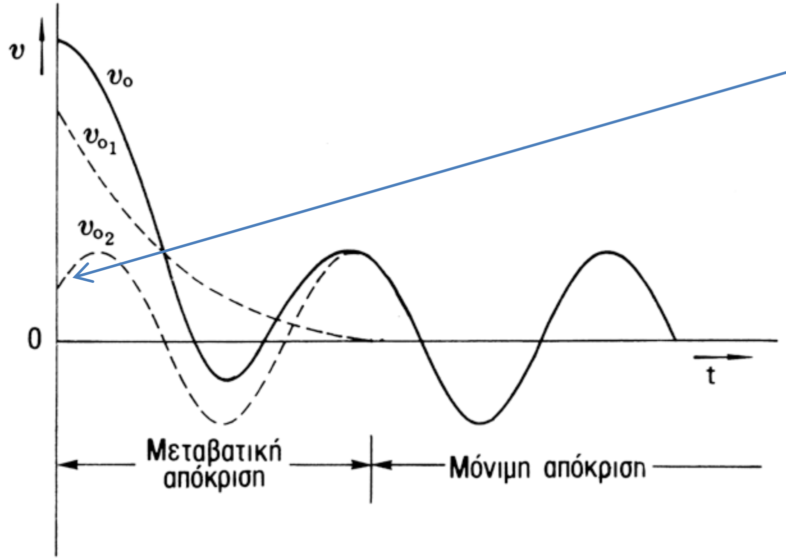


Απόκριση σε συνημιτονική είσοδο

- Τελικά

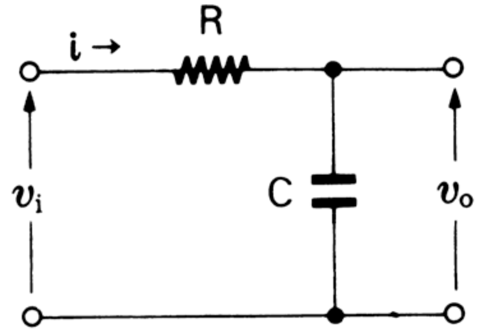
$$u_o(t) = \frac{V_m}{1+\left(RC\omega\right)^2} e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{V_m R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}} \cos\left(\omega t + \varphi\right)$$

Προήγηση φάσης



Κύκλωμα ολοκλήρωσης RC

- Δικτύωμα ολοκλήρωσης
- Χαμηλοπερατό φίλτρο
- Δικτύωμα καθυστέρησης φάσης



- Ισχύει $Ri + u_o = u_i$

  και η διαφορική εξίσωση γίνεται $RC\dfrac{du_o}{dt} + u_o = u_i$

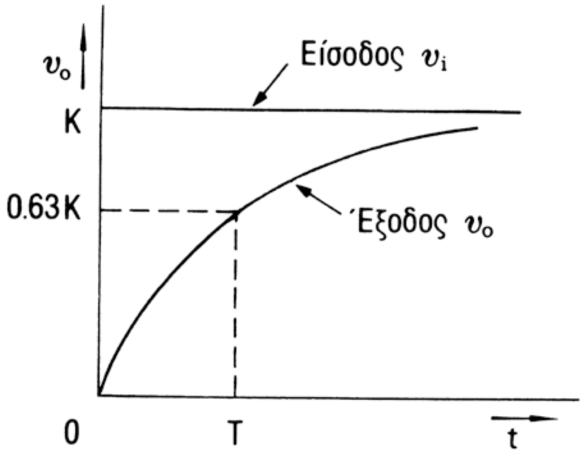
- Απόκριση σε βηματική είσοδο

  Έχουμε ήδη δείξει ότι: $u_R = Ke^{-\frac{t}{RC}}$

  Συνεπώς $u_C = u_i - u_R = K - Ke^{-\frac{t}{RC}}$ που αποτελεί την έξοδο

$$u_o = K\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

Απόκριση σε βηματική είσοδο



Προσεγγιστικά για *t<<RC* προκύπτει

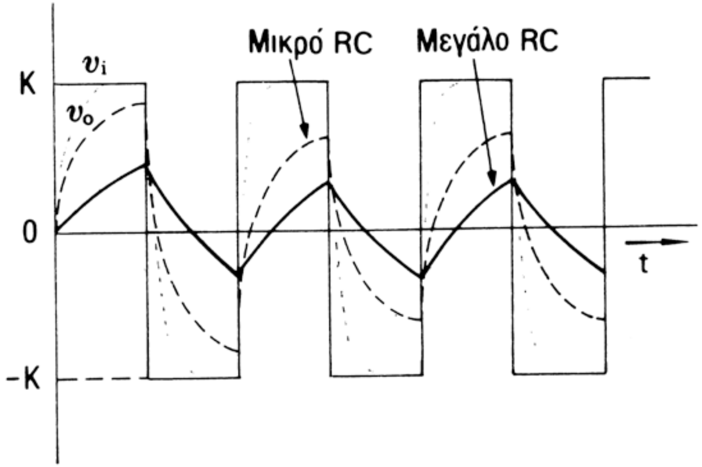
$$e^{-\frac{t}{RC}} \cong 1 - \frac{t}{RC}$$

$$u_o \cong \frac{t}{RC}$$

Έχουμε

$$\int_0^t u_i dt = \int_0^t K dt = Kt \cong RCu_o$$

οπότε $$u_o = \frac{1}{RC}\int_0^t u_i dt, \quad \gamma\iota\alpha\ t << RC$$



Γι αυτό αναφέρεται ως κύκλωμα ολοκλήρωσης

Απόκριση σε συνημιτονική είσοδο

- Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι σε είσοδο

$$u_i = V_m \cos \omega t, \quad t \geq 0$$

έχουμε έξοδο

$$u_o(t) = \frac{-V_m}{1+(RC\omega)^2} e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{\frac{V_m}{C\omega}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\varphi = \tan^{-1} RC\omega$$

Επειδή η γωνία έχει αρνητική τιμή το κύκλωμα χαρακτηρίζεται ως καθυστέρησης φάσης

Η συχνοτική συνάρτηση μεταφοράς

- Όταν ένα γραμμικό κύκλωμα διεγείρεται από ημιτονικό σήμα , μετά το μεταβατικό φαινόμενο, το σήμα στην έξοδο γίνεται ημιτονικό της ίδιας συχνότητας .
- Το σήμα στην έξοδο διαφέρει κατά πλάτος και φάση
- Το πλάτος του σήματος εξόδου ισούται με το πλάτος του σήματος εισόδου πολλαπλασιασμένου με το μέτρο της συχνοτικής συνάρτησης μεταφοράς του κυκλώματος
- Η συχνοτική συνάρτηση μεταφοράς ενός κυκλώματος είναι μια μιγαδική συνάρτηση της οποίας το μέτρο ισούται με το λόγο των πλατών των σημάτων εξόδου-εισόδου και το όρισμά του με τη διαφορά φάσεις των σημάτων εισόδου-εξόδου

Συχνοτικά διαγράμματα

- Το πλάτος και το όρισμα της συχνοτικής συνάρτησης μεταφοράς ενός δικτυώματος είναι συναρτήσεις της κυκλικής συχνότητας ω
- Για απεικόνιση μεγεθών με ευρεία περιοχή μεταβολής, πχ. 100:1 και άνω, χρησιμοποιούνται λογάριθμοι
- Σε μονάδες decibel μετράμε μια τάση V_2 σε σχέση με την τάση αναφοράς V_1, παίρνοντας 20 φορές το δεκαδικό λογάριθμο του λόγου V_1/V_2

$$A = 20\log\frac{V_2}{V_1}$$

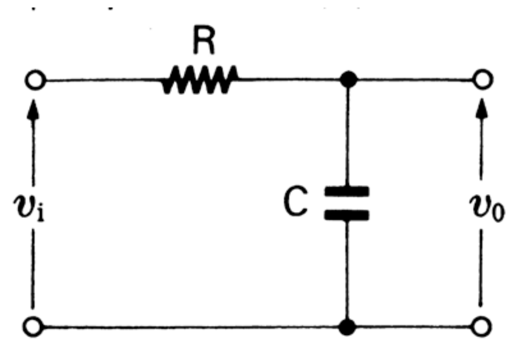
Πχ. για V_2=1000 V_1 , A=60dB

- Δεκάδα συχνότητας, πχ. μία δεκάδα: $f_2=10f_1$
- Οκτάβα συχνότητας, πχ. δυο οκτάβες $f_2=4f_1$

Διάγραμμα Bode του βαθυπερατού φίλτρου

- Συχνοτική συνάρτηση μεταφοράς

$$G(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega RC}=\frac{1}{1+j\omega T}$$



Όπου $T=RC$ και θέτωντας $T=1/\omega_c$ έχουμε

$$G(j\omega)=\frac{1}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_c}}=\frac{1}{1+j\dfrac{f}{f_c}}$$

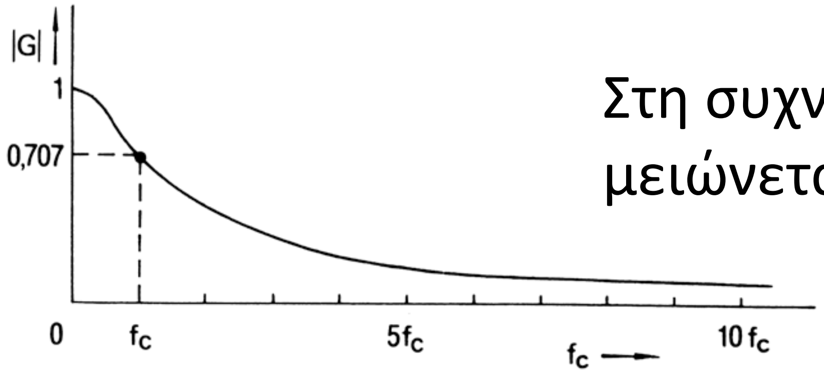
$\omega=2\pi f$, και f_c η συχνότητα αποκοπής

Μέτρο της συχνοτικής συνάρτησης μεταφοράς

$$\left|G(jf)\right|=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{f}{f_c}\right)^2}}$$

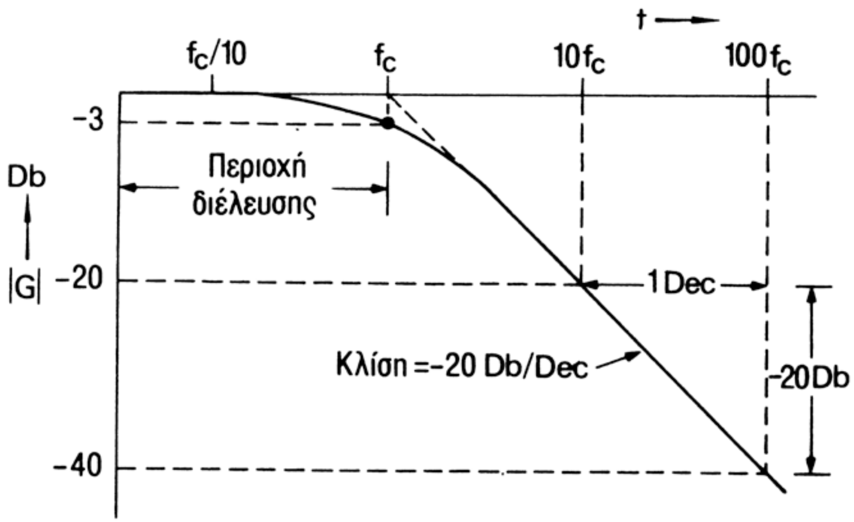
$$\left|G(jf_c)\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}=0,707$$

Διάγραμμα Bode του βαθυπερατού φίλτρου



Στη συχνότητα αποκοπής το μέτρο μειώνεται στο 70,7% της μέγιστης τιμής

- Η απεικόνιση του μέτρου γίνεται καλύτερα σε λογαριθμικό διάγραμμα



Στη συχνότητα αποκοπής το μέτρο μειώνεται κατά 3dB

Προσέγγιση με ευθείες

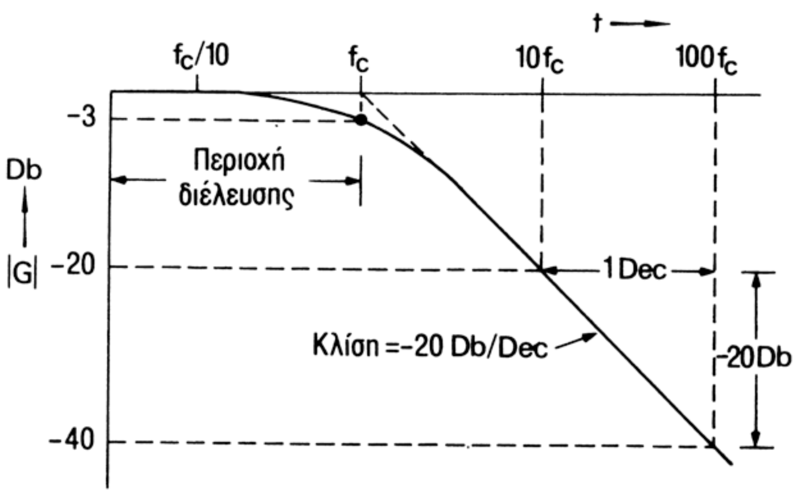
Προσέγγιση του πλάτους

- Από τις μαθηματικές εκφράσεις του μέτρου έχουμε

$$A = 20\log|G| = 20\log\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_c}\right)^2}} \cong 0DdB, \quad \gamma\iota\alpha\ f << f_c$$

$$A = 20\log|G| = 20\log\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_c}\right)^2}} \cong -20\log\frac{f}{f_c} = -20x, \quad \gamma\iota\alpha\ f >> f_c$$

$$x = \log\frac{f}{f_c}$$

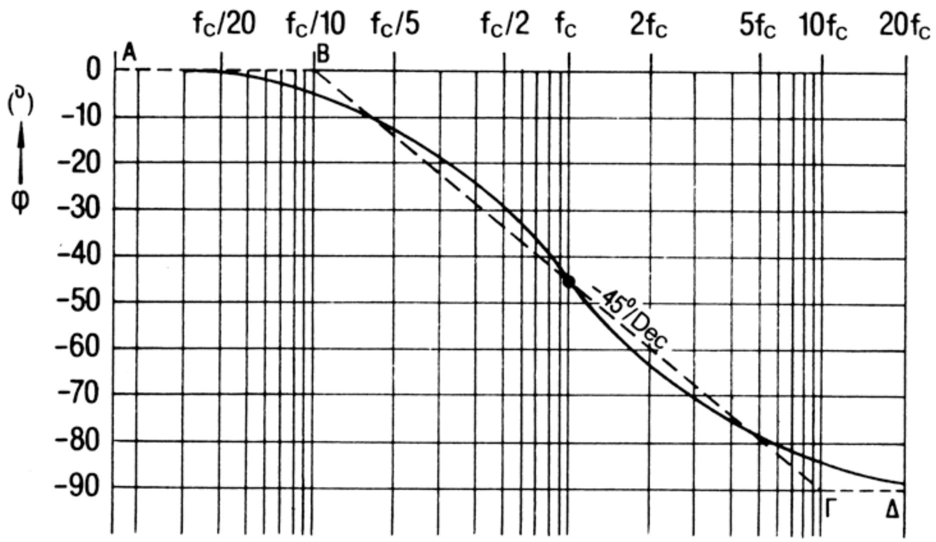


Η κλίση της ευθείας είναι -20dB/δεκάδα

Προσέγγιση της φάσης

- Για το όρισμα της συνάρτησης *G* έχουμε

$$\varphi = \angle G = -\angle\left(1 + j\frac{f}{f_c}\right) = -\tan^{-1}\frac{f}{f_c}$$

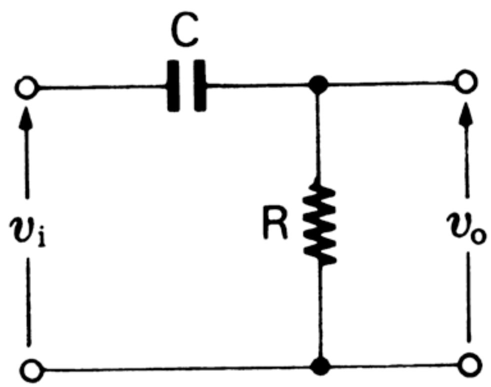


Προσεγγίζεται με τρία ευθύγραμμα τμήματα (ΑΒΓΔ)

Διάγραμμα Bode του υψηπερατού φίλτρου

- Συχνοτική συνάρτηση μεταφοράς

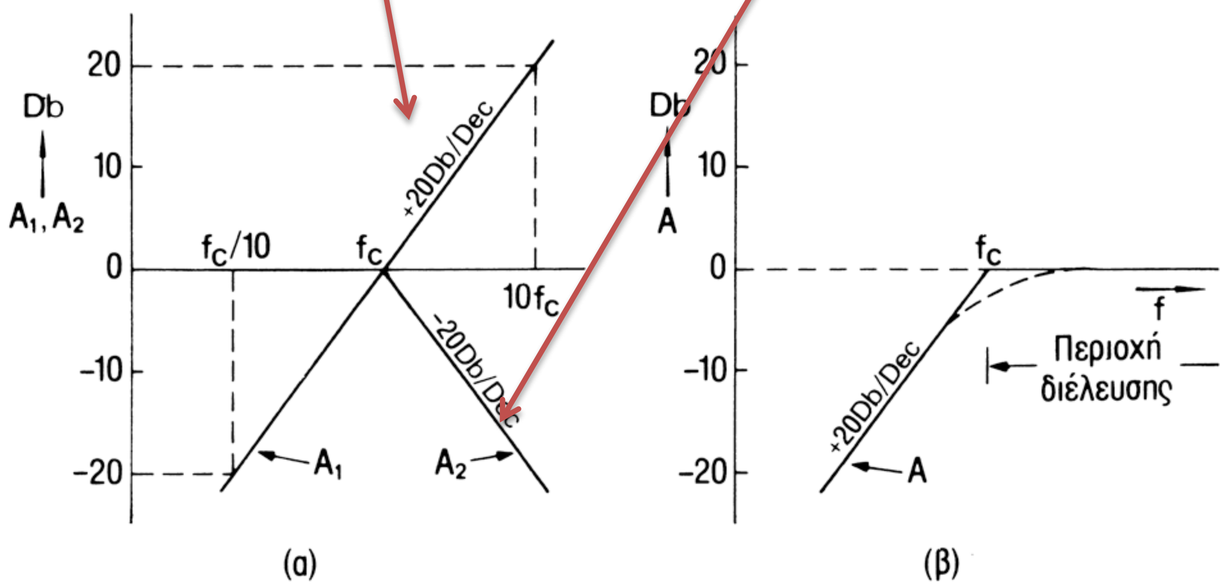
$$G(j\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = \frac{j\dfrac{f}{f_c}}{1 + j\dfrac{f}{f_c}}$$



ω=2πf, και f_c =1/RC η συχνότητα αποκοπής

Προσέγγιση του πλάτους

$$A = 20\log\left|G\right| = 20\log\frac{f}{f_c} - 20\log\left|1 + j\frac{f}{f_c}\right|$$



Το διάγραμμα Bode προκύπτει ως συνδυασμός